

1. Iskazati i dokazati Teoremu o dovoljnim uslovima za postojanje ponovljenih limesa.

Neka $f : D(\subset R^2) \rightarrow R$ i neka je $(x_0, y_0) \in D$ tačka nagomilavanja domena funkcije. Ako

a) postoji $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = \alpha$

b) za svako $y \in R$ postoji $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x,y) \in D}} f(x,y) = \psi(y)$

tada postoji ponovljeni limes $\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x,y)$ i jednak je dvojnomo.

Dokaz: Iz a) sledi da

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall (x,y) \in D) \neq (x_0, y_0))$$

$$\|(x,y) - (x_0, y_0)\| < \delta \Rightarrow |f(x,y) - \alpha| < \varepsilon$$

Puštajući da $x \rightarrow x_0$ zbog neprekidnosti funkcije apsolutne vrednosti dobijamo da važi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall (x,y) \in D) \neq (x_0, y_0))$$

$$\|(x,y) - (x_0, y_0)\| < \delta \Rightarrow \left| \lim_{x \rightarrow x_0} f(x,y) - \alpha \right| < \varepsilon$$

odnosno

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall y) |y - y_0| < \delta \Rightarrow |\psi(y) - \alpha| < \varepsilon$$

što znači da je $\lim_{y \rightarrow y_0} \psi(y) = \alpha$

2. Moore-ova teorema o razmeni dva limesa. Iskaz i dokaz.

Neka $f : A \times B \rightarrow R, (A, B \subseteq R, A, B \neq \emptyset)$ i $(x_0, y_0) \in A \times B$. Ako važi

a) $(\forall y \in B)$ postoji $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x,y) = \psi(y)$

b) $\exists \lim_{y \rightarrow y_0} f(x,y) = \varphi(x)$ uniformno po x na skupu A ,

tada postoje oba ponovljena limesa kao i dvojni i svi su međusobno jednaki.

Dokaz:

Zbog a) važi:

$$(i) \quad (\forall y \in B)(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta_1 > 0)(\forall x \in A) \quad 0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x,y) - \psi(y)| < \frac{\varepsilon}{6}$$

Zbog b) važi:

$$(ii) \quad (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta_2 > 0)(\forall y \in B) \quad 0 < |y - y_0| < \delta_2 \Rightarrow (\forall x \in A) |f(x,y) - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{6}$$

Dokazaćemo da funkcija zadovoljava Cauchy-jev uslov za postojanje limesa, odakle će zbog kompletnosti prostora R^2 slediti tvrđenje.

Neka su (x', y') i (x'', y'') elementi takvi da je $|x' - x_0| < \delta$, $|x'' - x_0| < \delta$ i $|y' - y_0| < \delta$, $|y'' - y_0| < \delta$, pri čemu $(x', y'), (x'', y'') \in A \times B$ i $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$.

Tada za proizvoljno fiksirano $\hat{y} \in B$ važi da je

$$\begin{aligned} |f(x', y') - f(x'', y'')| &\leq |f(x', y') - f(x', \hat{y})| + |f(x', \hat{y}) - f(x'', y'')| \leq \\ &\leq |f(x', y') - \varphi(x'')| + |\varphi(x') - f(x', \hat{y})| + |f(x', \hat{y}) - f(x'', y'')| \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} + |f(x', \hat{y}) - f(x'', y'')| \leq \\ &\leq \frac{2\varepsilon}{6} + |f(x', \hat{y}) - \psi(\hat{y})| + |\psi(\hat{y}) - f(x'', \hat{y})| + |f(x'', \hat{y}) - \varphi(x'')| + |\varphi(x'') - f(x'', y'')| \leq \end{aligned}$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Cauchy-jev uslov postojanja dvojnog limesa

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall (x', y') \neq (x_0, y_0), (x'', y'') \neq (x_0, y_0) \in D)$$

$$\|(x', y') - (x_0, y_0)\| < \delta, \|(x'', y'') - (x_0, y_0)\| < \delta \Rightarrow |f(x', y') - f(x'', y'')| < \varepsilon$$

U našem slučaju imamo da za $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ važi da je

$$|x' - x_0|, |y' - y_0| < \|(x', y') - (x_0, y_0)\| < \delta$$

$$|x'' - x_0|, |y'' - y_0| < \|(x'', y'') - (x_0, y_0)\| < \delta$$

Dakle, važi Cauchy-jev uslov konvergencije te dvojni limes postoji.

3. Definirati pojmove parcijalnog izvoda i diferencijabilnosti funkcije više promenljivih.

Neka je $f : D(\subset R^n) \rightarrow R$, D otvoren skup. Parcijalni izvod funkcije f po promenljivoj x_i u tački $(x_1^0, \dots, x_n^0)$ definišemo pomoću

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^0, \dots, x_n^0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1^0, \dots, x_i + h, \dots, x_n^0) - f(x_1^0, \dots, x_n^0)}{h}.$$

Neka je $f : D(\subset R^n) \rightarrow R$ i D otvoren skup. Funkcija f je diferencijabilna u tački $(x_1^0, \dots, x_n^0)$ ako postoji linearna funkcija $A(x_1, \dots, x_n) \in L(R^n, R)$ takva da važi

$$\lim_{\substack{\|h\| \rightarrow 0 \\ (h_1, \dots, h_n) \rightarrow (0, \dots, 0)}} \frac{|f(x_1^0 + h_1, \dots, x_n^0 + h_n) - f(x_1^0, \dots, x_n^0) - A(x_1^0, \dots, x_n^0)(h_1, \dots, h_n)|}{\|h\|} = 0$$

Vrednost $A(x_1^0, \dots, x_n^0)$ nazivamo izvodom funkcije f u tački $(x_1^0, \dots, x_n^0)$ i označavamo sa $f'(x_1^0, \dots, x_n^0)$.

4. Iskazati i dokazati Teoremu o potrebnim uslovima diferencijabilnosti.

Neka je funkcija $f : D(\subset R^n) \rightarrow R$ diferencijabilna u tački $x_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in D$. Tada postoje parcijalni izvodi, po svim promenljivim u toj tački.

Dokaz:

Ako je funkcija $f : D(\subset R^n) \rightarrow R$ diferencijabilna u tački $x_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in D$ tada važi

$$\lim_{\substack{\|h\| \rightarrow 0 \\ (h_1, \dots, h_n) \rightarrow (0, \dots, 0)}} \frac{|f(x_1^0 + h_1, \dots, x_n^0 + h_n) - f(x_1^0, \dots, x_n^0) - f'(x_1^0, \dots, x_n^0)(h_1, \dots, h_n)|}{\|h\|} = 0$$

Specijalno ako bi $(h_1, \dots, h_n) = (0, \dots, h_i, \dots, 0)$, $h_i = h$, $\forall i$, $i = \overline{1, \dots, n} \Rightarrow (0, \dots, h_i, \dots, 0) = h e_i$

gde je $(e_1, \dots, e_n)$ standardna baza prostora R^n tada bi gornji limes bio

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(x_1^0, \dots, x_i + h, \dots, x_n^0) - f(x_1^0, \dots, x_n^0) - f'(x_1^0, \dots, x_n^0) h e_i|}{h} = 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{f(x_1^0, \dots, x_i + h, \dots, x_n^0) - f(x_1^0, \dots, x_n^0)}{h} - f'(x_1^0, \dots, x_n^0) e_i \right| = 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1^0, \dots, x_i + h, \dots, x_n^0) - f(x_1^0, \dots, x_n^0)}{h} = f'(x_1^0, \dots, x_n^0) e_i$$

Ova jednakost postoji za $\forall i$, $i = \overline{1, \dots, n}$ pa sledi da postoje parcijalni izvodi po svim promenljivim $\square$

5. Iskazati i dokazati Teoremu o jednakosti mešovityh parcijalnih izvoda.
Navesti iskaz pomoćne leme koja se u dokazu koristi.

Neka je $f : D(\subset \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$, D otvorena okolina tačke (x^0, y^0) i neka $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ i $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ postoje na okolini D . Ako je $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ neprekidna funkcija u tački (x^0, y^0) tada postoji u toj tački $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ i važi da je

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x^0, y^0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x^0, y^0).$$

Dokaz:

Bez ograničenja opštosti možemo pretpostaviti da je $(x^0, y^0) = (0, 0)$. Pozivajući se na sledeću lemu: "Neka je $D \subset \mathbb{R}^2$ otvoren skup koji sadrži tačku $(0, 0)$ i neka je $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija koja ima parcijalne izvode na D . Neka je $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$ neprekidna funkcija u $(0, 0)$. Ako je

$$A(h, k) = f(h, k) - f(h, 0) - f(0, k) + f(0, 0)$$

tada je

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ k \rightarrow 0}} \frac{A(h, k)}{hk}.$$

Onda imamo da je

$$(1) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = \lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{A(h, k)}{hk},$$

odnosno

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) \quad 0 < |h| < \delta \wedge 0 < |k| < \delta \Rightarrow \left| \frac{A(h, k)}{hk} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) \right| < \varepsilon$$

S druge strane imamo da je

$$(2) \quad \begin{aligned} \lim_{k \rightarrow 0} \frac{A(h, k)}{hk} &= \frac{1}{h} \lim_{k \rightarrow 0} \left[\frac{f(h, k) - f(h, 0)}{k} - \frac{f(0, k) - f(0, 0)}{k} \right] \\ &= \frac{1}{h} \left[\frac{\partial f}{\partial y}(h, 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \right] \end{aligned}$$

Zbog (1) imamo da je

$$(3) \quad \left| \lim_{k \rightarrow 0} \frac{A(h, k)}{hk} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) \right| < \varepsilon \text{ odakle zbog (2) sledi da je za } 0 < |h| < \delta \text{ ispunjeno}$$

$$\left| \frac{1}{h} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(h, 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \right) - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) \right| < \varepsilon$$

Uzimajući $\lim_{h \rightarrow 0}$ u prethodnom uslovu dobijamo da je

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) \text{ što je trebalo dokazati.}$$

6. Iskaz i dokaz Taylorove teoreme za funkcije više promenljivih.

Neka funkcija $f : D(\subset R^n) \rightarrow R$ i neka tačka $a \in D$. Neka je $f \in C^n(D)$ i neka je tačka $b \in D$ takva da duž koja spaja tačke a i b leži u D . Tada važi Taylor-ova formula

$$f(b) = f(a) + \frac{1}{1!} f'(a)(b-a) + \frac{1}{2!} f''(a)(b-a)^2 + \dots \\ \dots + \frac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a)(b-a)^{(n-1)} + \frac{1}{n!} f^{(n)}(c)(b-a)^{(n)}$$

za neko $c = a + t_0(b-a)$, $t_0 \in [0,1]$.

Dokaz:

Posmatrajmo pomoćnu funkciju $\varphi(t) = f(a + t(b-a)) : [0,1] \rightarrow \overline{ab} \subset D$ gde je $\overline{ab}$ označena duž koja spaja tačke a i b . Na osnovu Taylorove formule za funkciju jedne promenljive imamo da važi:

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \frac{1}{1!} \varphi'(0)(1-0) + \frac{1}{2!} \varphi''(0)(1-0)^2 + \dots \\ \dots + \frac{1}{(n-1)!} \varphi^{(n-1)}(0)(1-0)^{(n-1)} + \frac{1}{n!} \varphi^{(n)}(t_0)(1-0)^n$$

$$f(b) = f(a) + \frac{1}{1!} f'(a)h + \frac{1}{2!} f''(a)h^2 + \dots \\ \dots + \frac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a)h^{(n-1)} + \frac{1}{n!} f^{(n)}(c)h^{(n)}, \quad (h = b-a)$$

7. Iskazati i dokazati Teoremu o potrebnim uslovima za postojanje lokalnog ekstremuma.

Ako $f : D(\subset R^n) \rightarrow R$ u tački $c \in D$ ima lokalni ekstremum i ako je u toj tački diferencijabilna tada je $f'(c) = 0$, odnosno svi parcijalni izvodi funkcije f u tački c su nula.

Dokaz:

Posmatrajmo funkcije

$$\psi_i(x_i) = f(c_1, \dots, c_{i-1}, x_i, c_{i+1}, \dots, c_n)$$

za sve funkcije $i = 1, \dots, n$. Kako su date funkcije restrikcije funkcije f na skup

$D \cap (\{c_1\} \times \{c_2\} \times \dots \times \{c_{i-1}\} \times R \times \{c_{i+1}\} \times \dots \times \{c_n\})$ one u tački c_i imaju lokalni ekstremum. Na osnovu

Fermat-ove teoreme imamo da je $\psi_i(c_i) = 0$ za svako $i = 1, \dots, n$ odnosno $\frac{\partial f}{\partial x_i}(c) = \psi_i'(c_i) = 0$

8. Teorema o dovoljnim uslovima postojanja bezuslovnog ekstremuma. Skica dokaza.

Neka funkcija $f : D(\subset R^n) \rightarrow R$ i neka je $c \in D$ unutrašnja tačka. Ako je tačka c stacionarna (parcijalni izvodi funkcije f u tački c jednaki nuli) i ako su drugi parcijalni izvodi neprekidni u nekoj okolini tačke c tada važi:

- a) Ako je tačka $f''(c)(h)^2 > 0$ za svako $h \neq 0$ tada f ima lokalni minimum u tački c .
- b) Ako je tačka $f''(c)(h)^2 < 0$ za svako $h \neq 0$ tada f ima lokalni maksimum u tački c .
- c) Ako drugi izvodi imaju različite vrednosti za različito h tada u tački c funkcija nema lokalni ekstrem.

Dokaz:

Iz Taylor-ove formule imamo da je u okolini tačke c funkciju moguće predstaviti sa

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{1}{2!} f''(\hat{x})(x-c)^2 \quad \text{za } \hat{x} \in [c, x].$$

Kako je tačka c stacionarna imamo da je $f'(c) = 0$, odakle dobijamo da je

$$(1) \quad f(x) = f(c) + \frac{1}{2!} f''(\hat{x})(x-c)^2$$

a) Kako je funkcija $f''(c)(h)^2$ neprekidna ona na skupu svih h takvih da je $\|h\| = 1$ dostiže svoj minimum, koji ćemo označiti sa m i pritom važi da je $m > 0$ jer je $f''(c)(h)^2 > 0$. Sa druge strane, zbog neprekidnosti funkcije $f''(x)(h^2) > m - \varepsilon$ za proizvoljno $\varepsilon > 0$ dovoljno malo. Neka je $\varepsilon = \frac{m}{2}$, tada postoji okolina u takva da je $f''(x)(h)^2 > \frac{m}{2}$ za svako $x \in u$ i svako h za koje je $\|h\| = 1$. Imamo da se tada x može napisati u obliku $x = c + th$ gde je $t > 0$. Kako $\hat{x} \in u$ takođe, iz (1) dobijamo da je

$$\begin{aligned} f(x) &= f(c) + \frac{1}{2!} f''(\hat{x})(th)^2 = f(c) + \frac{1}{2!} t^2 f''(\hat{x})(h)^2 = \\ &> f(c) + \frac{1}{2!} \frac{t^2 m}{2} > f(c) \end{aligned}$$

odnosno u tački c je (strogi, lokalni) minimum.

b) Dokaz je sličan dokazu pod a), samo se polazi od pretpostavke da funkcija $f''(c)(h)^2$ dostiže maksimum koji je po znaku negativan, jer je $f''(c)(h)^2 < 0$.

c) Kombinujući a) i b) dobijamo da postoji okolina tačke c na kojoj za neko x_1 važi da je $f(x_1) > f(c)$, a za neko x_2 da je $f(x_2) < f(c)$ te u tački c nije (lokalni) ekstrem.

9. Uslovni ekstremum funkcije više promenljivih. Lagrange-ov postupak.

Tačka $x = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ je uslovni ekstremum funkcije $f : D(\subset R^n) \rightarrow R$ ako je ekstremum i ako zadovoljava unapred postavljeni sistem uslova

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= (x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \varphi_2 &= (x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ &\vdots \\ \varphi_m &= (x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{aligned}$$

Uslova mora biti manje $m < n$ od dimenzije prostora funkcije. Za nalaženje uslovnog ekstremuma formiramo pomoćnu **Lagranžeovu funkciju** koja zavisi od n promenljivih $x_1, x_2, \dots, x_n$ i plus od m novih $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ promenljivih. Langranžeova funkcija ima oblik

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) - \sum_{k=1}^m \lambda_k \varphi_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

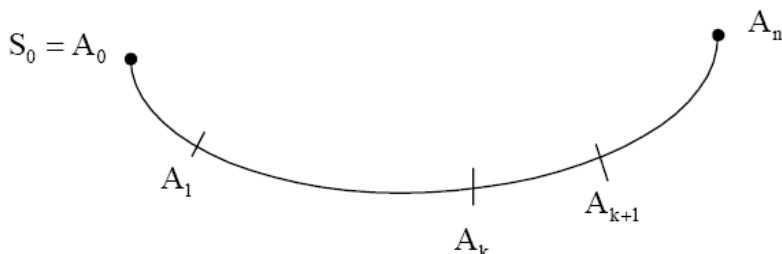
Kandidati za ekstremne vrednosti su one tačke za koje su parcijalni izvodi langražeove funkcije po svim promenljivim $(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ jednaki 0. Priroda tačke zavisi samo od drugog totalnog diferencijala funkcije L kada se ona posmatra samo kao funkcija od n promenljivih $x_1, x_2, \dots, x_n$ ne i od novih uvedenih $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$. Tada, ako je u nekoj tački drugi totalni diferencijal veći od 0 ta tačka je **minimum**, a ako je manji od nule ta tačka je **maksimum**. Za slučaj kada je drugi totalni diferencijal funkcije L jednak 0 tačku smatramo sedlastom, mada dodatna ispitivanja mogu dokazati da tačka može biti ekstrem.

10. Definicija krivolinijskog integrala prve vrste.

Neka je kriva C neprekidna, prosta, rektificibilna, zadana parametrizacijom

$$C : (x, y, z) \in R^3 \left\{ \begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t), t \in [a, b] \\ z = z(t) \end{array} \right\}$$

Neka je početna tačka krive označena sa S_0 . Krivu C podelimo tačkama $S_0 = A_0, A_1, \dots, A_n$ (=krajnja tačka) na proizvoljan način. Izbor ovih tačaka zovemo podela P krive C , i neka su sa $\widehat{A_k A_{k+1}}$ označene dužine lukova.



Neka nadalje σ_k označava dužinu luka $\widehat{A_k A_{k+1}}$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$). Na svakom od lukova $\widehat{A_k A_{k+1}}$ izaberemo proizvoljnu tačku $M_k = M_k(p, q, r)$, ($k = 0, 1, \dots, n-1$). Neka je data funkcija

$f : D(\subset R^3) \rightarrow R$, koja je definisana u svim tačkama krive C . Sa σ označimo Darboux-ovu sumu

$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(M_k) \sigma_k$. Neka je $\lambda = \max_{0 \leq k \leq n-1} \sigma_k$. Ako postoji konstanta I tako da je $\lim_{\lambda \rightarrow 0+} \sigma = I$ odnosno ako

je ispunjen sledeći Cauchy-jev uslov:

$(\exists I \in R)(\forall P)(\forall M_k \in \widehat{A_k A_{k+1}})(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0) \lambda < \delta \Rightarrow |\sigma - I| < \varepsilon$ tada za funkciju

f kažemo da je integrabilna u smislu krivolinijskog integrala prve vrste po krivoj C . Broj I nazivamo krivolinijski integral I vrste funkcije f duž date krive C i označavamo ga na sledeći način

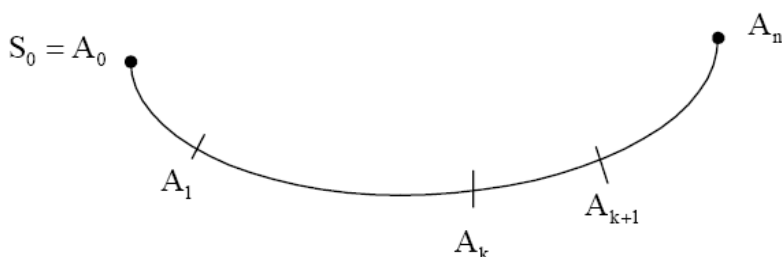
$I = (I) \int_C f(x, y, z) ds$. Pritom će umesto simbola $\int$ stajati $\oint$ ako znamo da je kriva C po kojoj integralimo zatvorena.

11. Definicija krivolinijskog integrala druge vrste.

Neka je kriva C neprekidna, prosta, rektificibilna, zadana parametrizacijom

$$C : (x, y, z) \in R^3 \left\{ \begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t), t \in [a, b] \\ z = z(t) \end{array} \right\}$$

Neka je početna tačka krive označena sa S_0 . Krivu C podelimo tačkama $S_0 = A_0, A_1, \dots, A_n$ (=krajnja tačka) na proizvoljan način. Izbor ovih tačaka zovemo podela P krive C , i neka su sa $\widehat{A_k A_{k+1}}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$ označene dužine lukova.



Neka je $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ gde je x_k projekcija tačke A_k na x osu. Formirajmo sumu:

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(M_k) \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} f(p, q, r) \Delta x_k.$$

Neka je $\lambda = \max_{0 \leq k \leq n-1} \Delta x_k$ dijametar podele P . Ako postoji konačan realan broj I tako da važi $\lim_{\lambda \rightarrow 0+} \sigma = I$

tada broj I nazivamo krivolinijski integral druge vrste funkcije f duž krive C po x osi. Broj

$$I \text{ označavamo sa } I = (\text{II}) \int_C f(x, y, z) dx. \text{ Ako je } C \text{ zatvorena kriva oznaka je: } I = (\text{II}) \oint f(x, y, z) dx.$$

Analogno se definiše krivolinijski integral druge vrste po y i z osi.

Neka su date tri funkcije (potpuno nezavisne jedna od druge) $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z) : R^3 \rightarrow R$ i neka su definisane duž navedene krive C . Za funkciju P definišemo krivolinijski integral druge vrste po x osi, a za Q i R definišemo iste integrale po osama y i z respektivno. Tada se **krivolinijski integral druge vrste** definiše kao

$$I = \int_C P dx + Q dy + R dz = (\text{II}) \int_C P(x, y, z) dx + (\text{II}) \int_C Q(x, y, z) dy + (\text{II}) \int_C R(x, y, z) dz$$

12. Izračunavanje krivolinijskog integrala druge vrste.

Neka su date funkcije $P, Q, R : C \rightarrow R$ koje su neprekidne u svim tačkama krive C , pri čemu je kriva C data u parametarskoj formi. $C : x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ pri čemu je $-\infty < \alpha \leq t \leq \beta < +\infty$ tako da su funkcije x, y, z, x', y', z' neprekidne na segmentu $[\alpha, \beta]$.

Tada se integral $I = \int_C P dx + Q dy + R dz$ svodi na Rimanov integral na sledeći način:

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} (P(x(t), y(t), z(t)) x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t)) y'(t) + R(x(t), y(t), z(t)) z'(t)) dt$$

13. Teoreme o nezavisnosti krivolinijskog integrala druge vrste od puta integracije.

T1: Integral $I = \int_C P dx + Q dy + R dz$ ne zavisi od puta integracije ako i samo ako postoji neka

funkcija $(x, y, z) \rightarrow u(x, y, z)$ takva da je $P dx + Q dy + R dz$ totalni diferencijal te funkcije, tj. ako je

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz = P dx + Q dy + R dz \text{ odnosno ako je } \frac{\partial u}{\partial x} = P, \frac{\partial u}{\partial y} = Q \text{ i } \frac{\partial u}{\partial z} = R$$

T2: Izraz $P dx + Q dy + R dz$ je totalni diferencijal neke funkcije $(x, y, z) \rightarrow u(x, y, z)$, ako važe sledeći uslovi

$$(**) \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z} \text{ i } \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}.$$

$P = P(x, y, z), Q = Q(x, y, z), R = R(x, y, z)$ su neprekidne funkcije.

14. Pojam dvojnog, trojnog i višestrukog integrala

Neka je data funkcija $f : R^2 \rightarrow R$ i neka je dat neprazan skup $0 \neq D \subset R^2$, koji može biti otvoren ili zatvoren. Neka je $\text{dom } f = D$ i pretpostavimo da postoji konstanta $M > 0$ takva da je za $\forall (x, y) \in D$ ispunjen uslov : $|f(x, y)| \leq M$. Podelimo oblast D , podelom P na podoblasti, $D_1, D_2, \dots, D_n$ tako da važi:

$$(i) \quad (\forall i \in N) D_i \in D \wedge D_i \neq \emptyset,$$

$$(ii) \quad \bigcup_{i=1}^n D_i = D$$

$$(iii) \quad (\text{int } D_i) \cap (\text{int } D_j) = 0; \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, n; \quad i \neq j$$

(Ovakva podela se naziva razbijanje oblasti D na podoblasti D_i). U svakoj oblasti D_i izaberimo proizvoljnu tačku $T_i(x, y) \in D_i$ ($1 \leq i \leq n$). Sa λ označimo maksimum od dijametara oblasti D_i : $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \lambda_i$, gde je $\lambda_i = \text{diam}(D_i) = \sup_{A, B \in D_i} (d(A, B))$.

Izrazom $\sigma = \sum_{i=1}^n f(T_i) \text{mes}(D_i)$, gde $\text{mes}(D_i)$ označava površinu oblasti D_i , definišemo Darboux-ovu sumu funkcije f nad oblašću D za podelu P i izbor tačaka T_i .

Ako postoji konstanta $I \in \mathbb{R}$ takva da za svaku podelu $P : D_1, D_2, \dots, D_n$ i za svaki izbor tačaka T_i u podeli P i za $\forall \varepsilon > 0$ postoji $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, takvo da važi implikacija:

$$\lambda < \delta \Rightarrow |\sigma - I| < \varepsilon, \text{ tada važi:}$$

a) Funkcija f se naziva integrabilnom funkcijom u smislu dvojnog integrala nad oblašću D .

b) Tada se broj I naziva dvojnim integralom funkcije f nad D u oznaci $I = \iint_D f(x, y) dx dy$.

Veoma slično i pod sličnim uslovima definišemo trojni (trostruki), a takođe i višestruki integral. Darboux-

ova suma u tom slučaju ima oblik $\sigma = \sum_{k=1}^n f(M_k) \text{mes}(V_k)$, pri čemu $\text{mes}(V_k)$ označava zapreminu

odnosno n -dimenzionu zapreminu podeone ćelije V_k . Trojini integral označavamo sa

$$I = \iiint_V f(x, y, z) dV, \text{ a } n\text{-dimenzioni sa } I = \iiint_V \dots \int f(x_1, \dots, x_n) dV.$$

15. Zamena promenljive u dvojnog i trojnog integralu

Posmatrajmo dvojni integral $I = \iint_D f(x, y) dx dy$ i pretpostavimo da se smenom $x = x(\rho, \varphi)$ i

$y = y(\rho, \varphi)$, gde se nove promenljive nalaze u nekom domenu $(\rho, \varphi) \in \Delta \subset \mathbb{R}^2$, skup $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ slika u $D \subset \mathbb{R}^2$, pri čemu su $x = x(\rho, \varphi)$ i $y = y(\rho, \varphi)$ jednoznačna i glatka preslikavanja. Tada važi da je

$$I = \iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{\Delta} f(x(\rho, \varphi), y(\rho, \varphi)) |J| d\rho d\varphi,$$

gde je J Jacobieva determinanta $J = \frac{D(x, y)}{D(\rho, \varphi)}$ preslikavanja $x = x(\rho, \varphi)$ i $y = y(\rho, \varphi)$.

Posmatrajmo trojni integral $I = \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$ i pretpostavimo da se smenom

$x = x(\rho, \theta, \varphi)$, $y = y(\rho, \theta, \varphi)$ i $z = z(\rho, \theta, \varphi)$, gde se nove promenljive nalaze u nekom domenu $(\rho, \theta, \varphi) \in \Delta \subset \mathbb{R}^3$, skup $\Delta \subset \mathbb{R}^3$ slika u $V \subset \mathbb{R}^3$, pri čemu su $x = x(\rho, \theta, \varphi)$, $y = y(\rho, \theta, \varphi)$ i $z = z(\rho, \theta, \varphi)$ jednoznačna i glatka preslikavanja. Tada važi da je

$$I = \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Delta} f(x(\rho, \theta, \varphi), y(\rho, \theta, \varphi), z(\rho, \theta, \varphi)) |J| d\rho d\theta d\varphi,$$

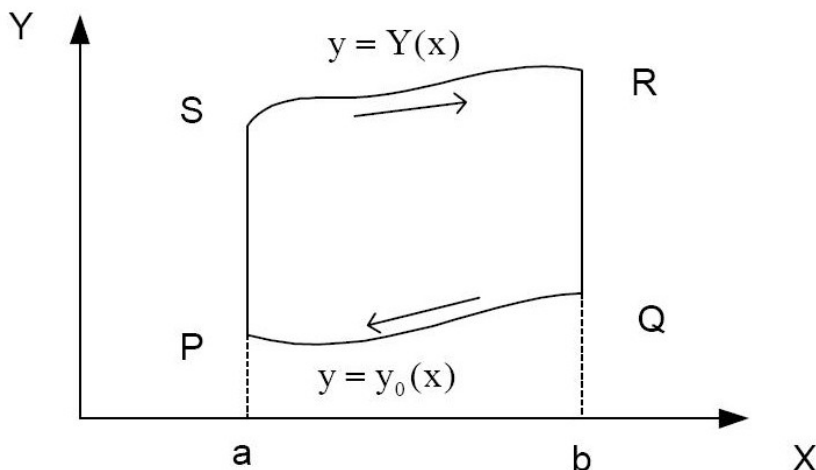
gde je J Jacobieva determinanta $J = \frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \theta, \varphi)}$ preslikavanja $x = x(\rho, \theta, \varphi)$, $y = y(\rho, \theta, \varphi)$ i $z = z(\rho, \theta, \varphi)$.

16. Green-Riemannova formula. Iskaz i dokaz

Neka su $P, Q: D \rightarrow \mathbb{R}$, neprekidno diferencijabilna preslikavanja oblasti $D \subset \mathbb{R}^2$, koju ograničava zatvorena kriva L . Tada važi

$$\oint_{L^+} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

Dokaz: Izvršimo dokaz za dovoljno jednostavne oblasti.



Pretpostavimo da je data oblast $D \subset \mathbb{R}^2$ i pretpostavimo da je ova oblast ograničena zatvorenim konturom $L = \widehat{PQRS}$, koja je definisana na sledeći način: $y_0 = y_0(x)$, $y = Y(x)$, $a \leq x \leq b$, pri čemu je $\forall x \in [a, b]$, $y_0(x) \leq Y(x)$ i ordinatama $x = a$, $y = b$. Tada na osnovu *Newton-Leibnitzove* formule imamo da je

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \int_a^b \int_{y_0(x)}^{Y(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = \int_a^b P(x, Y(x)) dx - \int_a^b P(x, y_0(x)) dx = \\ &= \int_{\widehat{SR}} P(x, y) dx + \int_{\widehat{QP}} P(x, y) dx = \oint_{L^-} P(x, y) dx = - \oint_{L^+} P(x, y) dx \end{aligned}$$

$$(*) \text{ zbog } \int_{\widehat{RQ}} P(x, y) dx = \int_{\widehat{PS}} P(x, y) dx = 0, \text{ jer je } dx = 0.$$

Pošto se analogno može izvesti da je $J = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \oint_{L^+} Q(x, y) dy$ sabiranjem integrala I i J dobija se zadato tvrđenje čime je dokaz završen.

17. Pojam površinskog integrala prve vrste

Neka je data površ $S \in \mathbb{R}^3$ koja zadovoljava sledeće uslove:

1. deo po deo glatka (tj. Sastoji se od unije najviše prebrojivo mnogo glatkih površi kod kojih se u svakoj tački površi, osim u rubnim tačkama, može postaviti tangentna ravan i to na jedinstven način).
2. ograničena
3. rektificijabilna (to je ona površ koja ima konačnu površinu).

Neka imamo podelu površi $P: S_1, S_2, \dots, S_n$ površi S za koju važi:

$$(i) \quad \forall i = 1, 2, \dots, n \text{ je } S_i \in S$$

$$(ii) \quad \bigcup_{i=1}^n S_i = S$$

$$(iii) \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, n; i \neq j \text{ važi da je } (\text{int } S_i) \cap (\text{int } S_j) = \emptyset$$

U toj podeli na proizvoljan način biramo tačke $M_k = M_k(x_k, y_k, z_k) \in S_k$ ($1 \leq k \leq n$).

Neka je $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} d(S_k)$ i sa $\sigma = \sum_{k=1}^n f(M_k) \text{mes}(S_k)$ označena Darboux-ova suma, gde je $f: S \rightarrow \mathbb{R}$

ograničena funkcija definisana u svim tačkama površi S .

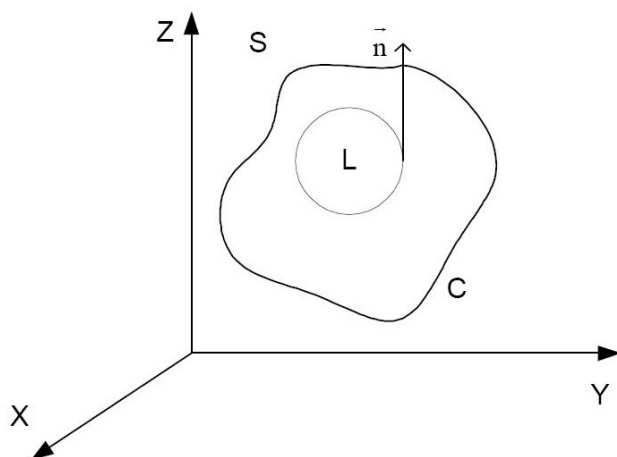
Ako postoji realan broj I takav da za $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ i $\forall P$ i $\forall M_k \in S_k$ važi:

$\lambda < \delta \Rightarrow |\sigma - I| < \varepsilon$. Tada :

- broj I nazivamo površinski integral prve vrste funkcije f po površi S .
- Za funkciju f kažemo da je integrabilna nad S u smislu površinskog integrala prve vrste
- Broj I označavamo sa $I = \iint_S f(x, y, z) dS$.

18. Pojam površi u prostoru, pojam jednostrane i dvostrane površi, definicija strane površi.

Površ u prostoru $\mathbb{R}^3$ jeste podskup tačaka prostora $\mathbb{R}^3$, takav da obrazuje neku prostornu površ.



Pretpostavimo da je data glatka površ $S \in \mathbb{R}^3$, pri čemu je rub ove površi izvesna zatvorena kontura C . U proizvoljnoj tački N ove površi povučemo jedinstvenu normalu $\vec{n}$ ($\vec{n} \perp S$) i opišemo kroz podnožje normale konturu $L \subset S$ takvu da je $L \cap C = \emptyset$.

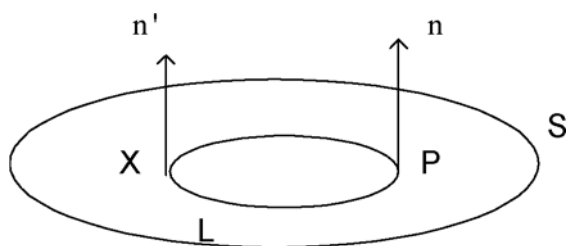
Pomeramo $\vec{n}$ duž L . Imamo dva slučaja:

- Šetajući $\vec{n}$ duž konture L posle povratka u tačku N normala $\vec{n}$ može da se vrati u svoj polazni položaj zadržavajući odgovarajući smer.
- Može da se desi da posle obilaska te konture, vektor $\vec{n}$ dođe u položaj ili poziciju sa smerom suprotnim od početnog smera u tački N .

Ako za svaku konturu $L \subset S$ normala zadrži isti smer kao i u početnom položaju N , tada se za površ S kaže da je **dvostrana** (Sfera). Nasuprot ovome, ako postoji barem jedna kontura L takva da posle njenog obilaska vektor $\vec{n}$ promeni svoj smer tada za površ S kažemo da je **jednostrana** (Mebijusov list).

Definicija strane površi

Izaberimo u dvostranoj, deo po deo glatkoj, ograničenoj i rektificibilnoj površi S jednu tačku P i u njoj postavimo normalu $\vec{n}$ ($\vec{n} \perp S$), pri čemu izaberimo na proizvoljan način i fiksirajmo jedan od dva moguća smera. Mimo ovoga uočimo tačku X na S . Za tačku X i tačku P kažemo da pripadaju istoj strani dvostrane površi S ako za svaku konturu L koja sadrži i P i X , ali ne seče granicu od S , normala $\vec{n}$ posle obilaska te konture zadržava isti smer kao i u početnom položaju.



19. Definicija površinskog integrala druge vrste.

Ukoliko je na površi $S \subset \mathbb{R}^3$ izabrana jedna strana površi (na primer "spoljna"), tada za površ kažemo da je "orjentisana".

Definicija površinskog integrala druge vrste po Oxy-ravni:

Neka površ $S \subset \mathbb{R}^3$ zadovoljava sledeće uslove:

1. deo po deo glatka,
2. ograničena,
3. rektificijabilna (tj. možemo da odredimo površinu površi),
4. dvostrana (orjentisana je),
5. na S je izabrana jedna strana površi (spoljna!).

Neka je u svakoj tački površi S definisana funkcija $R(x, y, z): S \rightarrow \mathbb{R}$ i neka je ona ograničena na S (tj.

$$\exists K > 0: |f(x, y, z)| \leq K, \forall (x, y, z) \in S).$$

Neka je $P = S_1, S_2, \dots, S_n$ proizvoljna podela S na orjentisane površine S_i ($1 \leq i \leq n$).

Svaka podpovrš orjentisana je na isti način kao i S .

Projektujemo S_i na Oxy ravan i neka su D_i ($1 \leq i \leq n$) veličine površina tih projekcija.

Neka je $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} d(D_i)$, gde su $d(D_i)$ dijometri površi D_i . Proizvoljno biramo tačke:

$M_i = M_i(x, y, z) \in S_i$ ($1 \leq i \leq n$). Darbouxovu sumu za površinski integral po xOy ravni definišemo

pomoću: $\sigma = \sum_{i=1}^n R(M_i) \cdot D_i$ gde D_i ima znak + ako je odabrana spoljna strana.

Ako postoji konstanta $I \in \mathbb{R}$ takva da za $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0, \forall P_n, \forall M_k \in S_k$ važi da je

$\lambda < \delta \Rightarrow |\sigma - I| < \varepsilon$ tada je:

1. $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \sigma = I$
2. Funkciju R nazivamo integrabilnom u smislu integrala druge vrste po Oxy ravni.
3. Broj I nazivamo integral druge vrste na S po Oxy ravni.
4. $I = \iint_S R(x, y, z) dx dy$.

Strane površi označavamo sa S^+ (spoljna strana) i S^- (unutrašnja strana).

Slično uradimo po Oyz i Ozx ravni za funkcije $P = P(x, y, z)$ i $Q = Q(x, y, z)$. Tada se

$$I = \iint_{S^+} P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dz dx + R(x, y, z) dx dy$$

Zove površinski integral druge vrste po spoljnoj strani površi S .

20. Veza površinskih integrala prve i druge vrste.

Neka je $\vec{n}(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ jedinični vektor normale na datu površ S (α, β, γ su uglovi koje $\vec{n}$ zaklapa sa x, y, z osama). Izdelimo S na veoma male površi, kojima dodeljujemo po vektor $\vec{n}$. Neka je $\text{mes}(D_i)$ mera površine projekcije površina S_i na Oxy ravan. Tada imamo da je

$$\left| \frac{\text{mes}(D_i)}{\text{mes}(S_i)} \right| = |\cos \gamma_i|, \text{ odnosno } \left(\frac{dx dy}{dS} = \cos \gamma \right), \text{ pa je } \text{mes}(D_i) = \text{mes}(S_i) \cdot \cos \gamma_i \text{ } (\gamma_i \text{ u izabranoj tački}).$$

Obzirom na prethodno, Darbouxova suma kojom se definiše integral po xOy ravni postaje

$$\sigma = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \cos \gamma_i \cdot \text{mes}(S_i) \Rightarrow I = \iint_S f(x, y, z) \cos \gamma dS$$

Dakle važi:

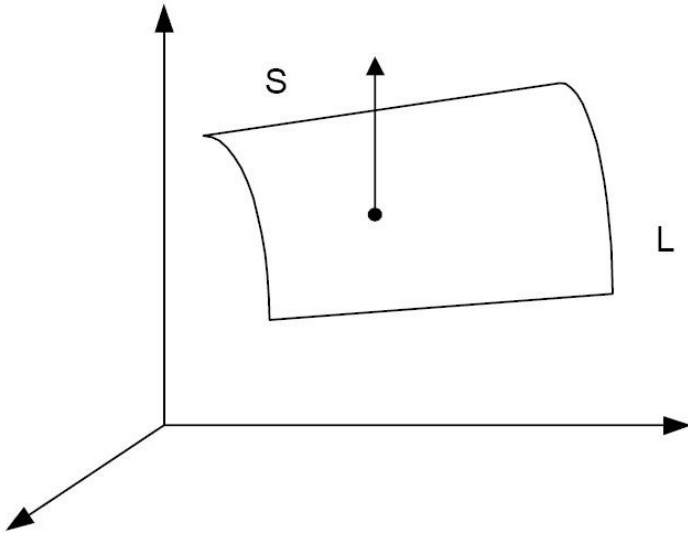
$$(II) \iint_S P dy dz + Q dz dx + R dx dy = (I) \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS.$$

21. Stokesova formula. Iskaz i dokaz.

Stokes-ova formula predstavlja vezu između površinskog integrala II vrste i krivolinijskog integrala II vrste.

Neka je $S \subset \mathbb{R}^3$ prosta (ne seče samu sebe), glatka, dvostrana površ, ograničena deo po deo glatkom konturom L , pri čemu na površi S biramo spoljnu stranu, a na L izvesnu pozitivnu orijentaciju kretanja. Neka je data funkcija $P = P(x, y, z)$ koja je neprekidna zajedno sa svim svojim prvim parcijalnim izvodima po svim promenljivim x, y, z i to u oblasti $S \cup L$. Pod svim ovim uslovima tada važi:

$$(i) \quad (II) \int_L P dx = (II) \oint_S \frac{\partial P}{\partial z} dz dx - \frac{\partial P}{\partial y} dx dy$$



Pretpostavimo dalje da još uvek važe sve pretpostavke koje se odnose na $S \cup L$, ali da su date još dve funkcije $Q = Q(x, y, z)$ i $R = R(x, y, z)$ koje zadovoljavaju analogne pretpostavke. Tada važe i sledeće dve formule:

$$(ii) \quad (II) \int_L Q dy = (II) \oint_S \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy - \frac{\partial Q}{\partial z} dy dz$$

$$(iii) \quad (II) \int_L R dz = (II) \oint_S \frac{\partial R}{\partial z} dy dz - \frac{\partial R}{\partial x} dz dx$$

Zahvaljujući formulama navedenim pod (i), (ii) i (iii) tada sleduje da važi i sledeća jednakost, koja se naziva Stokes-ova formula, i koja glasi:

$$\begin{aligned} \int_L P dx + Q dy + R dz &= (II) \oint_S \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS = \\ &= \oint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \end{aligned}$$

gde je $\vec{n} = \vec{n}(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ jedinični vektor normale postavljen na površi S u tački $(x, y, z) \in S$ (u stvari u tekućoj tački $(x, y, z) \in S$ mi imamo $\alpha = \alpha(x, y, z), \beta = \beta(x, y, z), \gamma = \gamma(x, y, z)$).

Dokaz:

Neka se parametarskim funkcijama $x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v)$ površ S jednoznačno preslikava na $\Delta \in \mathbb{R}_{u,v}^2$ (pri tome se kontura L preslikava na konturu Λ).

Kako u tom slučaju iz $x = x(u, v) \Rightarrow dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv$ imamo da je

$$\int_L P dx = (II) \int_{\Delta} \left(P \frac{\partial x}{\partial u} \right) du + \left(P \frac{\partial x}{\partial v} \right) dv$$

Prema Green-ovoj formuli dobijamo da je:

$$\int_L P dx = (II) \iint_{\Delta} \left(\frac{\partial}{\partial u} \left(P \frac{\partial x}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(P \frac{\partial x}{\partial u} \right) \right) dudv = \iint_{\Delta} \left(\frac{\partial P}{\partial z} B - \frac{\partial P}{\partial y} C \right) dudv = \oiint_S \frac{\partial P}{\partial z} dz dx - \frac{\partial P}{\partial y} dx dy$$

Analogno se dokazuju i jednakosti (ii) i (iii) čime je formula dokazana.

22. Formula Gauss-Ostrogradskog. Iskaz i dokaz.

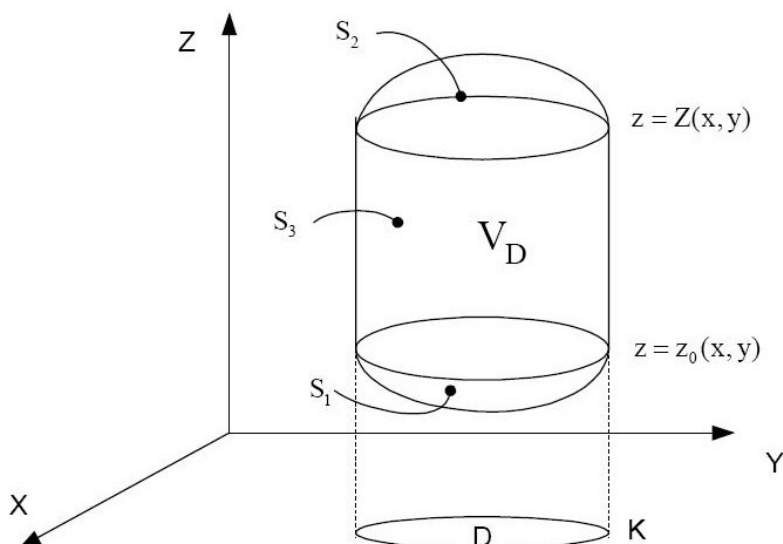
Ova formula omogućava da se sa površinskog integrala druge vrste pređe na trojni.

Neka je V kompaktan (zatvoren i ograničen), povezan skup u $\mathbb{R}^3$, čiji je rub deo po deo glatka površ.

Neka su $P, Q, R: V \rightarrow \mathbb{R}^3$ neprekidno diferencijabilne funkcije. (Dovoljno je da budu neprekidni oni parcijalni izvodi koji u formuli učestvuju). Tada važi formula :

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = (II) \oiint_S P dy dz + Q dz dx + R dx dy$$

Dokaz:



Dokaz ćemo izvršiti za telo koje je zadato sledećim jednačinama. U skladu sa oznakama na crtežu pretpostavimo da su date dve funkcije $S_1: z = z_0(x, y)$, $S_2: z = Z(x, y)$, gde je $(x, y) \in D$ i gde je ispunjen sledeći uslov $z_0(x, y) \leq Z(x, y)$ za $\forall (x, y) \in D$. Površ S_3 je ortogonalna na xOy ravan. Površ S_1, S_2 i S_3 su deo po deo glatke površi. Neka je takođe sa S označena spoljna strana površi $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$. Mimo ovoga pretpostavimo da je oblast D ograničena izvesnom konturom K koja je deo po deo glatka. Imamo da je

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz &= \iint_D dx dy \int_{z_0(x, y)}^{Z(x, y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz = \\ &= \iint_D R(x, y, Z(x, y)) dx dy - \iint_D R(x, y, z_0(x, y)) dx dy = \\ &= \oiint_{S_2} R(x, y, z) dx dy + \oiint_{S_1} R(x, y, z) dx dy + \left(\oiint_{S_3} R(x, y, z) dx dy = 0 \rightarrow dx \text{ i } dy \text{ na } S_3 \text{ jednake su } 0 \right) = \\ &= \oiint_S R(x, y, z) dx dy. \end{aligned}$$

Dakle dobili smo da važi (i) $\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \oiint_S R(x, y, z) dx dy$.

Analogno se dokazuju sledeće dve veze:

$$(ii) \iiint_V \frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz = \iint_S P(x, y, z) dy dz$$

$$(iii) \iiint_V \frac{\partial Q}{\partial y} dx dy dz = \iint_S Q(x, y, z) dz dx$$

23. Pojam vektorskog polja. Gradijent, divergencija i rotor. Klasifikacija polja.

- Pretpostavimo da su date tri realne funkcije: $P, Q, R: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. One definišu vektorsko polje $\vec{A}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ opisano jednakošću $\vec{A}(\vec{r}) = P(\vec{r}) \cdot \vec{i} + Q(\vec{r}) \cdot \vec{j} + R(\vec{r}) \cdot \vec{k}$
- Ako je data funkcija $u = u(x, y, z): \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tada vektor $\nabla u = \text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k}$ nazivamo **gradijent** funkcije u .
- Izraz $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$ naziva se **divergencija** vektorskog polja $\vec{A}$ i označava se na sledeći način $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \text{div} \vec{A}$. Inače jasno je $\text{div} \vec{A} = \nabla \cdot \vec{A}$ gde je $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$.
- Za polje A rotor, u oznaci $\text{rot} \vec{A}$ je definisan sa: $\text{rot} \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$

Očigledno je $\text{rot} \vec{A} = \nabla \times \vec{A}$.

• **Klasifikacija vektorskog polja $\vec{A}$:**

1. Potencijalno (bezvrtložno): $\text{rot} \vec{A} = 0 \wedge \text{div} \vec{A} \neq 0$
2. Solenoidno (vrtložno): $\text{rot} \vec{A} \neq 0 \wedge \text{div} \vec{A} = 0$
3. Laplace-ovo: $\text{rot} \vec{A} = 0 \wedge \text{div} \vec{A} = 0$
4. Složeno polje: $\text{rot} \vec{A} \neq 0 \wedge \text{div} \vec{A} \neq 0$

24. Jednoznačne i višeznačne funkcije. Navesti primere.

Funkcija $f: C \rightarrow P(C)$ naziva se kompleksnom funkcijom. Ako je $f(z)$ jedinstveno određen kompleksan broj tada funkciju f nazivamo **jednoznačnom** ili **uniformnom**. Ako je $f(z)$ podskup skupa C koji ima bar dve tačke funkciju f nazivamo **multiformnom** ili **višeznačnom**.

Primeri:

a) $f(z) = z^2$

$z = \rho \cdot e^{i(\varphi+2k\pi)} \rightarrow z^2 = \rho^2 \cdot e^{i(2\varphi+4k\pi)}$ k ne utiče na vrednost funkcije, te je ona jednoznačno određena.

b) $f(z) = \ln z$

$$\ln z = \ln(\rho \cdot e^{i(\varphi+2k\pi)}) = \ln \rho + \ln e^{i(\varphi+2k\pi)} =$$

$$= \underbrace{\ln \rho}_{\text{Re}(\ln z)} + i \underbrace{(\varphi + 2k\pi)}_{\text{Im}(\ln z)}$$

k utiče na vrednost funkcije

$f(z) = \ln z$ - multiformna funkcija

25. Pojam izvoda i diferencijabilnosti kompleksne funkcije. Veza sa neprekidnošću.

Neka je funkcija $f(z)$ jednoznačno definisana u nekoj okolini tačke $z_0 \in \mathbb{C}$. Izvod funkcije $f(z)$ u tački z_0 definišemo pomoću

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

Pod uslovom da postoji konačna granična vrednost. Uočimo da zamenom $z = z_0 + \Delta z$ dobijamo ekvivalentnu definiciju izvoda izrazom

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Funkcija koja ima izvod u tački z_0 naziva se diferencijabilnom u toj tački.

Iz diferencijabilnosti funkcije sledi neprekidnost.

Neka je funkcija diferencijabilna u tački z_0 . Uslov diferencijabilnosti funkcije ekvivalentan je uslovu postojanja kompleksnog broja A i funkcije $w(z)$ tako da je

$$f(z) - f(z_0) = A(z - z_0) + w(z)(z - z_0)$$

pri čemu važi da je $\lim_{z \rightarrow z_0} w(z) = 0$

Odavde dobijamo da je $\lim_{z \rightarrow z_0} (f(z) - f(z_0)) = f'(z_0) \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) = 0$, odakle sledi da je $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$

što pokazuje neprekidnost funkcije u tački z_0 . **Obrnuto ne važi.** Posmatrajmo funkciju $f(z) = \bar{z} = x - yi$.

Funkcije $u(x, y) = x$ i $v(x, y) = -y$ su neprekidne pa je i $f(z) = \bar{z}$ neprekidna funkcija. Kako je

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y}$$

uzimajući da je $\Delta y = 0$, a $\Delta x \rightarrow 0$ dobijamo graničnu vrednost 1, a uzimajući $\Delta y \rightarrow 0$, a $\Delta x = 0$ dobijamo -1. Dakle, granična vrednost ne postoji pa funkcija nema izvod ni u jednoj tački.

26. Cauchy-Riemanovi uslovi. Iskaz i dokaz.

Jednoznačna funkcija $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, gde je $z = x + yi$, je diferencijabilna u tački $z_0 = x_0 + iy_0$ ako i samo ako su $u(x, y)$ i $v(x, y)$ diferencijabilne u tački (x_0, y_0) i važe

Cauchy-Riemanovi uslovi

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \quad \text{i} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$$

Dokaz:

Uslovi su potrebni. Ako je f diferencijabilna u tački z_0 , tada postoji granična vrednost

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

$$\text{odnosno, } f'(z_0) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \left\{ \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)}{\Delta x + i\Delta y} + i \frac{v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)}{\Delta x + i\Delta y} \right\}.$$

Kako prethodna granična vrednost ne zavisi od krive po kojoj $\Delta x \rightarrow 0$ i $\Delta y \rightarrow 0$ posmatrajmo dva slučaja:

(i) Ako je $\Delta y = 0$, a $\Delta x \rightarrow 0$ dobijamo da je

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\{ \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} + i \frac{v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)}{\Delta x} \right\} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0). \end{aligned}$$

(ii) Ako je $\Delta y \rightarrow 0$, a $\Delta x = 0$ dobijamo da je

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left\{ \frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)}{i\Delta y} + i \frac{v(x_0, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)}{i\Delta y} \right\}$$

$$= -i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) .$$

Izjednačavanjem realnih i imaginarnih delova iz (i) i (ii) dobijamo **Cauchy-Riemannove** uslove. Odavde dobijamo više različitih izraza za izvod funkcije:

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) . \end{aligned}$$

Dokaz diferencijabilnosti funkcija $u(x, y)$ i $v(x, y)$. Kako je $f(z)$ diferencijabilna u $z_0 = x_0 + iy_0$ iz jednakosti (1) $f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = A(\Delta z) + w(z_0 + \Delta z)\Delta z$ dobijamo da je

$$(2) \quad \begin{aligned} &u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) + iv(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0) = \\ &f'(z_0)(\Delta x + i\Delta y) + (w_1(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) + iw_2(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y))(\Delta x + i\Delta y) \end{aligned}$$

pri čemu važi da je $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} w_1(x_0 + \Delta x) = 0$ i $\lim_{\Delta y \rightarrow 0} w_2(y_0 + \Delta y) = 0$

Zamenjujući $f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)$, nakon izjednačavanja realnih delova leve i desne strane jednakosti (1), dobijamo da važi

$$\begin{aligned} u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0) &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y + \\ &w_1(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)\Delta x - w_2(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)\Delta y . \end{aligned}$$

Kako je $\frac{|\Delta x|}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} < 1$ i $\frac{|\Delta y|}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} < 1$ imamo da je

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \left| \frac{w_1(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)\Delta x - w_2(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \right| = 0$$

Odakle sledi da je

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{w_1(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)\Delta x - w_2(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0 .$$

Poslednja jednakost obezbeđuje diferencijabilnost funkcije $u(x, y)$ u tački (x_0, y_0) . Diferencijabilnost funkcije $v(x, y)$ u tački (x_0, y_0) dokazujemo analogno, zamenjujući u (1)

$$f'(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \text{ i izjednačavanjem imaginarnih delova.}$$

Uslovi su dovoljni. Kako su funkcije $u(x, y)$ i $v(x, y)$ diferencijabilne u tački (x_0, y_0) imamo da važi (3)

$$u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y + \theta_1(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) i$$

$$(4) \quad v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y + \theta_2(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) , \text{ pri čemu je}$$

$$(5) \quad \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\theta_i(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0 , \text{ za } i = 1, 2 .$$

Sabiranjem jednakosti (3) sa jednakošću (4) koja je prethodno pomnožena sa i dobijamo da je

$$f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right)_{(x_0, y_0)} \Delta x + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right)_{(x_0, y_0)} \Delta y +$$

$$+ \theta_1(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) + i\theta_2(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y).$$

Zamenjujuću **Cauchy-Riemannove** uslove $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ i $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ u prethodnu jednakost dobijamo da je

$$f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right)_{(x_0, y_0)} (\Delta x + i\Delta y) + \theta_1(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) + i\theta_2(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$$

A kako je zbog uslova (5)

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\theta_1(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) + i\theta_2(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)}{\Delta x + i\Delta y} = 0$$

Na osnovu (1), zbog ekvivalentnosti apsolutne i obične konvergencije ka nuli, sledi da je funkcija $f(z)$ diferencijabilna u z_0 .

27. Pojam krivolinijskog integrala kompleksne funkcije kompleksnog argumenta.

Neka je funkcija $f(z)$ jednoznačno definisana i neprekidna u svim tačkama rektificibilne krive l . Neka je kriva podeljena tačkama $z_i = l(t_i)$ ($i = 0, 1, \dots, n$), kao na slici

koje odgovaraju podeli $P: \alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta$.

Neka je $\lambda = \max_{0 \leq i \leq n-1} |z_{i+1} - z_i|$ **dijametar podele**. Ako su

θ_i ($i = 1, \dots, n-1$) proizvoljne tačke krive l koje pripadaju delu krive između tačaka z_i i z_{i+1} , izrazom

$$S_\lambda(n) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\theta_i)(z_{i+1} - z_i) = \sum_{i=1}^{n-1} f(\theta_i)\Delta z_i$$

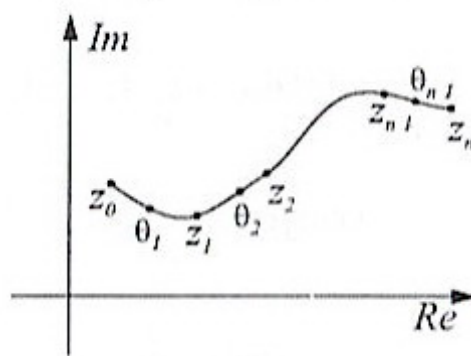
gde je $\Delta z_i = z_{i+1} - z_i$, definišemo integralnu sumu funkcije

f po krivoj l . Ako postoji kompleksan broj I takav da je

$\lim_{\lambda \rightarrow 0} S_\lambda = I$, tada I nazivamo vrednošću kompleksnog integrala funkcije f duž krive l i označavamo ga

sa $\int_l f(z)dz$. Uočimo da je uslov $\lambda \rightarrow 0$ ekvivalentan uslovu $n \rightarrow \infty$ te je integral moguće definisati kao

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_\lambda(n) = I.$$



28. Cauchz-Gortasove teoreme. Iskaz i dokaz.

Prva Cauchy-Gortasova teorema. Neka je l prosta, deo po deo glatka kontura koja ograničava jednostruko povezanu oblast D . Ako je funkcija f regularna u svim tačkama oblasti D i krive l tada je

$$\int_l f(z)dz = 0.$$

Dokaz: Pozivamo se na teoremu koja tvrdi da za funkciju $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ jednoznačno

definisanu i neprekidnu u svim tačkama krive l sledi da $\int_l f(z)dz$ postoji ako i samo ako integrali

$$\int_l u dx - v dy \text{ i } \int_l v dx + u dy \text{ postoje i pritom važi (1) } \int_l f(z)dz = \int_l u dx - v dy + i \int_l v dx + u dy.$$

Kako podintegralne funkcije na desnoj strani jednakosti (1) zadovoljavaju uslove Green-ove

teoreme za krivolinijske integrale dobijamo da je $\int_l f(z)dz = \iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx dy + i \iint_D \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx dy$.

Primenjujući Cauchy-Riemannove uslove integrali na desnoj strani su 0, čime je tvrđenje dokazano.

Druga Cauchy-Goursatova teorema. Neka su l_1 i l_2 proste, deo po deo glatke konture, koje ograničavaju dvostruko povezanu oblast D pri čemu je l_1 spoljašnja a l_2 unutrašnja kontura. Ako je funkcija f regularna u oblasti D i u tačkama krivih l_1 i l_2 tada je

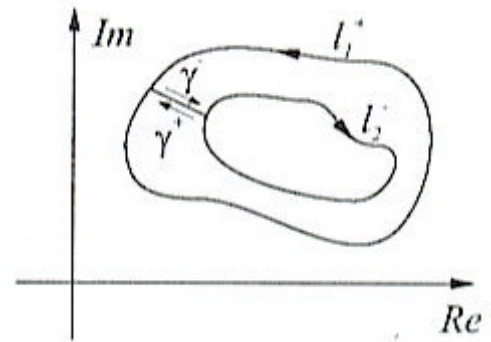
$$\int_{l_1^+} f(z)dz = \int_{l_2^+} f(z)dz .$$

Dokaz: Neka l_1^+ i l_2^+ označavaju pozitivno orjentisane krive l_1 i l_2 . Spojimo ove krive sa krivom γ kao na slici. Kako je f regularna funkcija, zbog prve teoreme imamo da je

$$\int_{l_1} f(z)dz + \int_{\gamma^-} f(z)dz + \int_{\gamma^+} f(z)dz + \int_{l_2} f(z)dz = 0$$

Iz $\int_{\gamma^-} f(z)dz + \int_{\gamma^+} f(z)dz = 0$, sledi da je

$$\int_{l_1^+} f(z)dz + \int_{l_2^+} f(z)dz , \text{ čime je teorema dokazana.}$$



Teorema se može generalizovati za n-tostruko povezanu oblast:

$$\int_{l_1^+} f(z)dz = \sum_{k=1}^n \int_{l_k^+} f(z)dz$$

29. Cauchy-jeva integralna formula i n-ti izvod funkcije pomoću integrala.

Neka je l prosta, deo po deo glatka kriva, koja ograničava jednostruko povezanu oblast D . Ako je f regularna funkcija na skupu D i krivom l , tada za svaku tačku $a \in D$ važi da je

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{l^+} \frac{f(z)}{z-a} dz$$

pod istim pretpostavkama važi da je

$$f'(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{l^+} \frac{f(z)}{(z-a)^2} dz$$

Indukcijom se može pokazati da važi

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{l^+} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz$$

30. Pojam Laurentovog reda funkcije. Teorema o koeficijentima reda. Dokaz.

Neka je $a \in \mathbb{C}$ fiksirani broj i $c_n (n \in \mathbb{Z})$ brojevi iz $\mathbb{C}$. Izraz

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z-a)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n$$

nazivamo **Laurentovim redom** pri čemu prvu sumu na desnoj strani jednakosti nazivamo **glavnim delom**, a drugu sumu **regularnim delom** Laurentovog dela.

Teorema o koeficijentima Laurentovog reda: Funkcija f regularna u prstenu

$P = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - a| < R\}$, gde je $a \in \mathbb{C}$, a $0 \leq r < R \leq +\infty$. Tada se vrednost funkcije f u svakoj tački $z \in P$ može predstaviti Laurentovim redom pri čemu su njegovi koeficijenti c_n dati sa

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{l^+} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz$$

gde je l bilo koja kontura koja obuhvata tačku a i sadržana je u prstenu P . Pritom dati red konvergira ka vrednosti funkcije f u tački z .

Dokaz:

Neka je z_0 fiksirana, proizvoljno izabrana tačka kružnog prstena

P . Neka su $\Gamma_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| = r_1, r_1 > r\}$ i

$\Gamma_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| = R_1, R_1 < R\}$ kružnice sa centrom u a .

Ove kružnice opisujemo kako bi funkcija f bila regularna i na granici i unutar kružnog prstena izmađu njih. Neka je $\gamma = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-z_0| = \rho\}$ pri čemu γ leži unutar prstena ograničenog krivama Γ_1 i Γ_2 . Na osnovu druge Cauchy-Goursatove teoreme važi da je

$$\int_{\Gamma_2^+} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = \int_{\Gamma_1^+} \frac{f(z)}{z-z_0} dz + \int_{\gamma^+} \frac{f(z)}{z-z_0} dz$$

a kako zbog Cauchyve integralne formule važi da je $\int_{\gamma^+} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = 2\pi i f(z_0)$ iz prethodnog dobijamo da

je

$$(1) \quad f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2^+} \frac{f(z)}{z-z_0} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1^+} \frac{f(z)}{z-z_0} dz$$

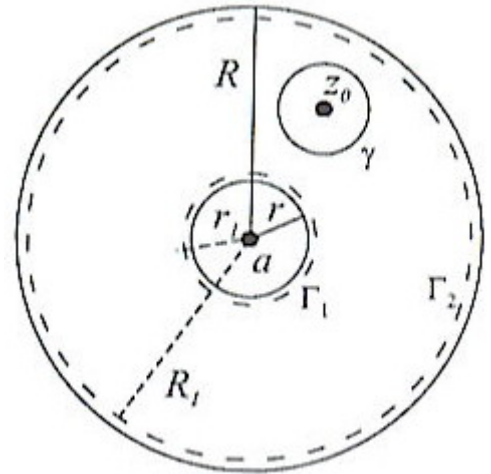
Kako je za $z \in \Gamma_2$ zadovoljeno $\left| \frac{z_0-a}{z-a} \right| = \frac{|z_0-a|}{R_1} < 1$ tada je

$$\begin{aligned} \frac{f(z_0)}{z-z_0} &= \frac{f(z)}{z-a-(z-a)} = \frac{f(z)}{z-a} \cdot \frac{1}{a - \frac{z_0-a}{z-a}} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z_0-a)^n}{(z-a)^{n+1}} f(z) \end{aligned}$$

odakle sledi da je

$$(2) \quad \int_{\Gamma_2^+} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_{\Gamma_2^+} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz \right) (z_0-a)^n.$$

Slično, za $z \in \Gamma_1$, zbog $\left| \frac{z-a}{z_0-a} \right| = \frac{r_1}{|z_0-a|} < 1$ imamo da je



$$\begin{aligned}\frac{f(z_0)}{z-z_0} &= \frac{f(z)}{z-a-(z-a)} = -\frac{f(z)}{z-a} \cdot \frac{1}{a-\frac{z-a}{z_0-a}} \\ &= -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-a)^n}{(z_0-a)^{n+1}} f(z) = -\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{(z_0-a)^n}{(z-a)^{n+1}} f(z)\end{aligned}$$

pa dobijamo da je

$$(3) \quad \int_{\Gamma_1^+} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = - \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\int_{\Gamma_1^+} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz \right) (z_0-a)^n$$

Redovi u jednakostima (2) i (3) konvergiraju uniformno jer je funkcija f ograničena na Γ_1 i Γ_2 i geometrijski red uniformno konvergira, pa je bilo moguće izvršiti integraciju član po član elemenata sume. Zamenom (2) i (3) u (1), s obzirom na činjenicu da se integrali pod sumama mogu smatrati integralima po bilo kojoj konturi l koja obuhvata tačku a i pripada kružnom prstenu P (to je zbog Cauchyjeve integralne formule n -tog izvoda funkcije), sledi tvrđenje teoreme.

31. Redukcija Laurentovog reda funkcije na Taylorov, za regularne funkcije. Iskaz i dokaz.

Ako je funkcija regularna u oblasti $D = \{z \mid |z-a| < R\}$ tada se ona može na jedinstven način predstaviti Taylorovim redom

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)$$

Dokaz:

Primenjujući teoremu o koeficijentima Laurentovog reda imamo da je

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_l f(z)(z-a)^{n-1} dz = 0$$

jer je podintegralna funkcija regularna unutar oblasti D . Sa druge strane, zbog jednakosti

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{l^+} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz \text{ imamo da je } c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \text{ čime je tvrđenje dokazano.}$$

32. Vrste singulariteta funkcije. Veza Laurentovog reda i singulariteta funkcije.

Funkcija $f(z)$ je regularna u nekoj tački ako je diferencijabilna u toj tački, a regularna na nekom skupu ako je regularna u svim tačkama tog skupa.

Funkcija $f(z)$ je analitička na nekom skupu ako je regularna u svim tačkama tog skupa sem možda u njih konačno mnogo i te tačke nazivamo singularitetima funkcije.

Ako je tačka z_0 singularitet funkcije i postoji okolina oko z_0 na kojoj je funkcija regularna, tačku z_0 nazivamo izolovanim singularitetom. Postoje tri tipa izolovanih singulariteta i to:

- a) Tačka z_0 je **otklonjiv singularitet** ukoliko postoji konačan $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$
- b) Tačka z_0 je **pol** ukoliko je $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$
- c) Tačka z_0 je **esencijalni singularitet** ukoliko $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ ne postoji.

Veza Laurentovog reda i singulariteta funkcije:

Neka je funkcija f regularna u okolini $|z-z_0| < R$ izuzev u tački z_0 .

- a) Tačka z_0 je otklonjiv singularitet ako i samo ako je glavni deo Laurentovog reda jednak 0.

- b) Tačka z_0 je pol ako i samo ako glavni deo Laurentovog reda sadrži konačno mnogo članova. Ako su pritom svi članovi Laurentovog c_{-k} za $k > n$ jednaki nuli, a $c_{-n} \neq 0$, kažemo da je z_0 pol n -tog reda.
- c) Tačka z_0 je esencijalan singularitet ako i samo ako glavni deo Laurentovog reda ima beskonačno mnogo članova.

33. Pojam ostatka funkcije u konačnoj tački i u beskonačnosti

Neka je funkcija $f(z)$ jednoznačno definisana i regularna u okolini $|z - z_0| < R$, sem možda u tački z_0 .

Ostatak (rezidum) funkcije $f(z)$ u tački z_0 , u oznaci $\text{Res}(f, z_0)$ definišemo pomoću

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C^+} f(z) dz,$$

gde je C^+ pozitivno orjentisana kružnica, sa centrom u z_0 , dovoljno malog poluprečnika tako da je unutar okoline u kojoj je funkcije regularna.

Neka je $f(z)$ regularna funkcija u oblasti $R < |z| < \infty$. Ostatak funkcije f u tački $z = \infty$ definišemo pomoću

$$\text{Res}(f, \infty) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C^-} f(z) dz$$

gde je C^- negativno orjentisana kružnica, sa centrom u 0, dovoljno velikog poluprečnika tako da se nalazi unutar oblasti na kojoj je funkcija regularna.

34. Ostatak funkcije u polu reda n. Dokaz.

Neka je $z_0 \in \mathbb{C}$ pol reda n funkcije $f(z)$. Tada važi da je

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} ((z - z_0)^n f(z))^{(n-1)}.$$

Dokaz: Kako je z_0 pol reda n , tada Laurentov red funkcije f u okolini tačke z_0 ima oblik

$$f(z) = \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} + \dots + \frac{c_{-1}}{(z - z_0)} + c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \dots$$

Množenjem sa $(z - z_0)^n$ prethodne jednakosti i nalaženjem $(n-1)$ -og izvoda dobijenog izraza, dobijamo da je

$$((z - z_0)^n f(z))^{(n-1)} = (n-1)!c_{-1} + n!c_0(z - z_0) + \dots,$$

odakle puštajući da $z \rightarrow z_0$ dobijamo da je

$$c_{-1} = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} ((z - z_0)^n f(z))^{(n-1)}, \text{ što je trebalo dokazati.}$$

35. Izračunavanje ostatka u beskonačnosti. Iskaz i dokaz.

Ostatak funkcije f u tački $z = \infty$ izračunava se pomoću

$$\text{Res}(f, \infty) = -\text{Res}\left(\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right); 0\right).$$

Dokaz: Neka je $C^- : |z| = R$ negativno orjentisana kružnica, dovoljno velikog poluprečnika R , koja predstavlja okolinu tačke ∞ . Uočimo da se recipročnim preslikavanjem $w = \frac{1}{z}$ ona preslikava u pozitivno orjentisanu kružnicu (pošto recipročna funkcija gornju poluravan slika u donju i obrnuto, a zbog konformnosti očuvava raspored tačaka) $C^+ : |w| = \frac{1}{R}$ pri čemu je $\frac{1}{R}$ dovoljno malo. Imamo da je

$\text{Res}(f(z); \infty) = \int_{C^-} f(z) dz$, odakle uvodeći smenu $z = \frac{1}{w}$ ($dz = -\frac{1}{w^2} dw$) dobijamo da je

$$\text{Res}(f(z); \infty) = -\frac{1}{2\pi} \int_{C^+} \frac{1}{w^2} f\left(\frac{1}{w}\right) dw = -\text{Res}\left(\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right); 0\right).$$

36. Ostatak funkcije izražen pomoću koeficijenata Laurentovog reda.

Ostatak funkcije $f(z)$ u konačnoj tački z_0 jednak je koeficijentu c_{-1} iz Laurentovog razvoja

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n \text{ funkcije } f(z) \text{ u tački } z_0.$$

Ostatak funkcije $f(z)$ u tački ∞ jednak je koeficijentu c_1 iz Laurentovog razvoja $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^{-n}$ funkcije $f(z)$ u tački ∞ .

37. Cauchyjeva teorema o rezidumima.

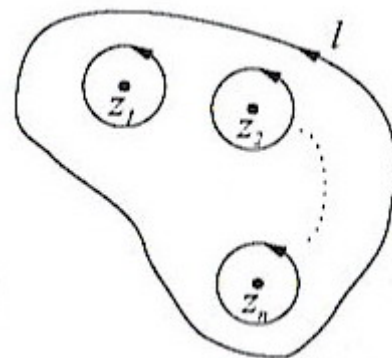
Neka je $f(z)$ jednoznačno definisana analitička funkcija u oblasti D , koja je regularna u svim tačkama konture l koja ograničava oblast D . Neka su $z_1, z_2, \dots, z_n$ izolovani singulariteti funkcije koji se nalaze u oblasti D . Tada važi

$$\int_{l^+} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f, z_k).$$

Dokaz: Oko svake tačke iz z_k opišemo kružnicu C_k , dovoljno malog poluprečnika, koja je smeštena unutar oblasti D . Zbog druge Cauchy-Goursatove teoreme imamo da je

$$\int_{l^+} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \int_{C_k^+} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f, z_k),$$

čime je tvrđenje dokazano.



38. Zbir ostataka analitičke funkcije u zatvorenoj kompleksnoj ravni.

Zbir ostataka analitičke funkcije $f(z)$ u zatvorenoj kompleksnoj ravni C^* jednak je nuli.

Dokaz: Neka su $z_1, z_2, \dots, z_n$ konačni izolovani singulariteti funkcije $f(z)$ i neka je C kružnica takva da su svi konačni singulariteti unutar oblasti koju ona ograničava. Imamo da je

$$\text{Res}(f; \infty) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C^-} f(z) dz = -\frac{1}{2\pi i} \int_{C^+} f(z) dz,$$

odakle, zbog Cauchyjeve teoreme o rezidumima teoreme dobijamo da je $\text{Res}(f; \infty) = -\sum_{k=1}^n \text{Res}(f; z_k)$,

odnosno $\text{Res}(f; \infty) + \sum_{k=1}^n \text{Res}(f; z_k) = 0$, čime je tvrđenje dokazano.

39. Prva Jordanova lema. Iskaz i dokaz.

Neka je funkcija f neprekidna na skupu

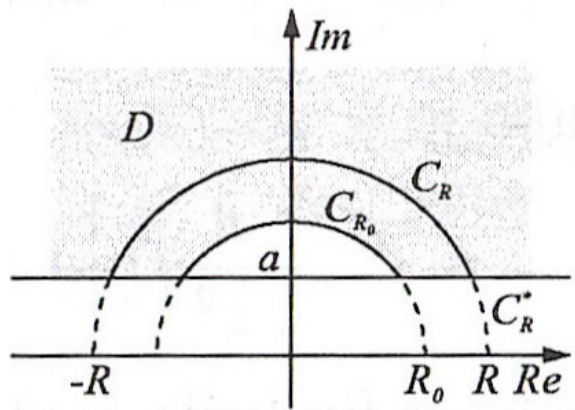
$D = \{z \mid |z| > R_0, \operatorname{Im}(z) > a, a \geq 0\}$. Ako je

$\lim_{\substack{z \rightarrow \infty \\ \operatorname{Im}(z) > 0}} f(z) = 0$ tada za svako $m > 0$

važi da je

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} e^{imz} f(z) dz = 0,$$

gde je $C_R = \{z \mid |z| = R, \operatorname{Im}(z) > a, R \geq R_0\}$.



Dokaz: Posmatrajmo krivu C_R koju ćemo dopuniti delovima iznad realne ose do prave $\operatorname{Im}(z) = a$ i označiti sa C_R^* . Uvodeći smenu $z = Re^{i\varphi}$, za $\varphi \in [0, \pi]$ dobijamo da je

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_R} e^{imz} f(z) dz \right| &\leq \int_{C_R} |e^{imz}| |f(z)| |dz| \leq \int_{C_R^*} |e^{imz}| |f(z)| |dz| \\ &= R \int_0^\pi |e^{imz} f(z) dz| |e^{-mR \cos \varphi}| |f(Re^{i\varphi})| d\varphi. \end{aligned}$$

Kako je $|e^{-mR \cos \varphi}| = 1$ i kako za svako $\varepsilon > 0$ i dovoljno velike poluprečnike R važi da je $|f(Re^{i\varphi})| < \varepsilon$, pošto je $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$, imamo da je

$$\left| \int_{C_R} e^{imz} f(z) dz \right| \leq R\varepsilon \int_0^\pi e^{-mR \sin \varphi} d\varphi$$

Primenjujući Jordanovu nejednakost dobijamo da je

$$\left| \int_{C_R} e^{imz} f(z) dz \right| \leq R\varepsilon \int_0^\pi e^{-\frac{2mR\varphi}{\pi}} d\varphi = \frac{\varepsilon\pi}{2} (1 - e^{-mR}) < \frac{\varepsilon\pi}{2}.$$

Puštajući da ε teži nuli sledi tvrđenje leme.

40. Druga i treća Jordanova lema. Iskaz i dokaz.

Druga Jordanova lema.

Neka je funkcija f neprekidna na skupu

$D = \{z \in \mathbb{C} \mid a \leq \arg(z - z_0) \leq \beta\}$. Ako je

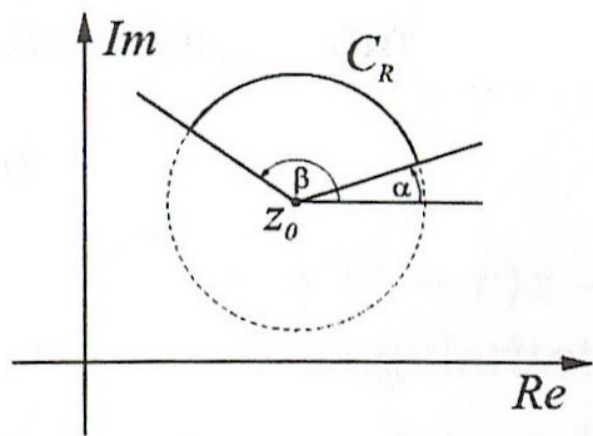
$$\lim_{\substack{z \rightarrow \infty \\ z \in D}} (z - z_0) f(z) = A$$

tada je

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) dz = iA(\beta - \alpha)$$

gde je

$$C_R = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = R, a \leq \arg(z - z_0) \leq \beta\}.$$



Dokaz: Za dovoljno velike R i proizvoljno $\varepsilon > 0$ funkcija se može predstaviti u obliku

$(z - z_0) f(z) = A + g(z)$ tako da je $|g(z)| < \varepsilon$, odakle sledi da je $f(z) = \frac{A}{z - z_0} + \frac{g(z)}{z - z_0}$. Iz poslednje

jednakosti imamo da je

$$(*) \quad \int_{C_R} f(z) dz = A \int_{C_R} \frac{dz}{z - z_0} + \int_{C_R} \frac{g(z)}{z - z_0} dz$$

Uvodeći smenu $z = z_0 + Re^{i\varphi}$, za $\varphi \in [\alpha, \beta]$ donijamo da je

$$\int_{C_R} \frac{dz}{z - z_0} = i \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi = i(\beta - \alpha) \quad \text{ i } \quad \left| \int_{C_R} \frac{g(z)}{z - z_0} dz \right| \leq \varepsilon |\beta - \alpha|.$$

Za dovoljno velike R , puštajući da ε teži nuli, dobijamo tvrđenje leme.

Treća Jordanova lema.

Pod istim pretpostavkama kao u drugoj Jordanovoj lemi iz uslova

$$\lim_{\substack{z \rightarrow \infty \\ z \in D}} (z - z_0) f(z) = A \text{ sledi da je } \lim_{R \rightarrow 0} \int_{C_R} f(z) dz = iA(\beta - \alpha).$$

Dokaz: Tvrđenje leme dokazuje se indetično kao tvrđenje druge Jordanove leme pri čemu se uslov "za dovoljno veliko R " zamenjuje uslovom za "dovoljno malo R ".

41. Razvoj funkcije u Fourierov red na segmentu $[-\pi, \pi]$. Uvodna teorema i definicija.

Ako red oblika

$$(1) \quad A + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l}$$

konvergira uniformno ka nekoj funkciji $f(x)$ na intervalu $[-l, l]$ tada je

$$(2) \quad a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad A = \frac{a_0}{2}$$

Dokaz: Kako red uniformno konvergira ka $f(x)$ tada važi da je

$$(3) \quad f(x) = A + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l}. \text{ Množenjem jednakosti (3) sa } \sin \frac{k\pi x}{l} \text{ i integracijom}$$

od $-l$ do l , kako je $\int_{-l}^l \sin \frac{k\pi x}{l} dx = 0$, dobijamo da je

$$(3') \quad \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \int_{-l}^l \cos \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{k\pi x}{l} dx + b_n \int_{-l}^l \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{k\pi x}{l} dx.$$

Analogno množenjem (3) sa $\cos \frac{k\pi x}{l}$, s obzirom da je $\int_{-l}^l \cos \frac{k\pi x}{l} dx = 0$, i integracijom od $-l$ do

l dobijamo da je

$$(3'') \quad \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{k\pi x}{l} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \int_{-l}^l \cos \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{k\pi x}{l} dx + b_n \int_{-l}^l \sin \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{k\pi x}{l} dx.$$

Odredimo vrednosti integrala koji učestvuju u (3') i (3''). Kako su funkcije $\cos \frac{k\pi x}{l} dx \sin \frac{k\pi x}{l} dx$,

$\sin \frac{k\pi x}{l} dx \cos \frac{k\pi x}{l} dx$, ($k \in \mathbb{N}$) neparne, a interval integracije simetričan u odnosu na 0, njihovi integrali

su 0. Posmatrajmo preostale integrale, za $k \neq n$. Imamo da je

$$\begin{aligned} \int_{-l}^l \cos \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{k\pi x}{l} dx &= \frac{1}{2} \int_{-l}^l \left(\cos \frac{(n-k)x}{l} + \cos \frac{(n+k)x}{l} \right) dx = 0 \\ \int_{-l}^l \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{k\pi x}{l} dx &= \frac{1}{2} \int_{-l}^l \left(\cos \frac{(n-k)x}{l} - \cos \frac{(n+k)x}{l} \right) dx = 0 \end{aligned}$$

U slučaju $k = n$ imamo da je

$$\int_{-l}^{+l} \cos^2 \frac{k\pi x}{l} dx = \frac{1}{2} \int_{-l}^{+l} (1 + \cos \frac{2k\pi x}{l}) dx = l$$

$$\int_{-l}^{+l} \sin^2 \frac{k\pi x}{l} dx = \frac{1}{2} \int_{-l}^{+l} (1 - \cos \frac{2k\pi x}{l}) dx = l$$

U obe jednakosti (3') i (3'') samo za $k = n$ integrali pod sumama su različiti od 0, te iz (3') dobijamo da je

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \text{ a iz (3'')} \text{ dobijamo da je } a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx. \text{ Na kraju, ako jednakost (3)}$$

integralimo od $-l$ do l dobijamo da je $A = \frac{a_0}{2}$ čime je dokaz završen.

Neka je f funkcija definisana na intervalu $[-l, l]$ i periodična sa periodom $2l$. **Trigonometrijski Fourierov red** funkcije f definiše se izrazom (1), pri čemu su koeficijenti a_n i b_n definisani sa (2).

42. Parsevalova nejednakost. Iskaz i dokaz.

Ako Fourierov red $A + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l}$ uniformno konvergira ka $f(x)$ tada važi jednakost

$$\frac{1}{l} \int_{-l}^{+l} (f(x))^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2), \text{ gde su}$$

$$a_0, a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \text{ i } b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \text{ koeficijenti Fourierovog reda funkcije } f(x).$$

Dokaz:

Množenjem jednakosti $f(x) = A + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l}$ sa $f(x)$ i integracijom od $-l$ do l

$$\begin{aligned} \text{dobijamo } \int_{-l}^l (f(x))^2 dx &= \frac{a_0}{2} \int_{-l}^l f(x) dx + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx + b_n \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \\ &= \frac{a_0^2}{2} l + l \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2) \end{aligned}$$

43. Besselova nejednakost. Iskaz i dokaz.

Ako je funkcija f neprekidna na intervalu $[-l, l]$ tada važi nejednakost

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{l} \int_{-l}^l (f(x))^2 dx, \text{ gde su}$$

$$a_0, a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \text{ i } b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \text{ koeficijenti Fourierovog reda funkcije } f(x).$$

Dokaz:

$$\text{Označimo sa } S_k(x) \text{ sumu } S_k(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^k a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (1).$$

Imamo da je $\int_{-l}^l (f(x) - S_k(x))^2 dx \geq 0$, pošto je podintegralna funkcija pozitivna, odakle dobijamo da je

$2 \int_{-l}^l f(x) S_k(x) dx = \int_{-l}^l (S_k(x))^2 dx \leq \int_{-l}^l (f(x))^2 dx$ (2). Množenjem jednakosti (1) sa $2f(x)$ i integracijom od $-l$ do l dobijamo da je

$$2 \int_{-l}^l f(x) S_k(x) dx = 2l \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2) \right] \quad (1').$$

Kvadriranjem jednakosti (2) i integracijom od $-l$ do l dobijamo da je

$$\int_{-l}^l f(x) S_k(x) dx = l \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2) \right] \quad (1'').$$

Zamenom (1') i (1'') u (2) i puštajući da $k \rightarrow +\infty$ dobijamo Besselovu nejednakost.

44. Riemannova lema. Iskaz i dokaz.

Za koeficijente trigonometrijskog Fourierovog reda neprekidne funkcije $f(x)$, važi da je

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0.$$

Dokaz.

Zbog Besselove nejednakosti $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{l} \int_{-l}^l (f(x))^2 dx$ imamo da red

$\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2)$ konvergira, te konvergiraju i redovi $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ i $\sum_{n=1}^{+\infty} |b_n|$, odakle sledi tvrđenje teoreme.

45. Teorema o uniformnoj konvergenciji Fourierovog reda. Iskaz i dokaz.

Neka je $f(x)$ neprekidna, periodična funkcija, sa periodom $2l$, takva da je $f'(x)$ deo po deo neprekidna funkcija. Tada Fourierov red funkcije $f(x)$ uniformno konvergira ka $f(x)$ na intervalu $[-l, l]$.

Dokaz:

Neka su $x_1, x_2, \dots, x_n$ tačke prekida funkcije $f'(x)$ na intervalu $[-l, l]$. Imamo da je

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{1}{l} \left(\int_{-l}^{x_1} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx + \dots + \int_{x_m}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \right)$$

Odakle parcijalnom integracijom dobijamo da je

$$a_n = \frac{1}{n\pi} \left(f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} + f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} + \dots + f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} \right) - \frac{1}{n\pi} \int_{-l}^l f'(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = -\frac{1}{n\pi} B_n,$$

gde su B_n koeficijenti Fourierovog reda razvoja funkcije $f'(x)$. Slično pokazujemo da je $b_n = -\frac{1}{n\pi} A_n$, gde su A_n takođe Fourierovi koeficijenti za funkciju $f'(x)$ na intervalu $[-l, l]$.

Kako je

$$\left| a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right| \leq |a_n| + |b_n| \leq \frac{1}{\pi} \left(\frac{|B_n|}{n} + \frac{|A_n|}{n} \right),$$

Da bi pokazali da Fourierov red uniformno konvergira, dovoljno je da pokažemo da brojni red

$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{|B_n|}{n} + \frac{|A_n|}{n} \right)$ konvergira, pa će tvrđenje teoreme važiti zbog Weierstrassovog kriterijuma uniformne

konvergencije funkcijskih redova. Polazeći od $(|B_n| - \frac{1}{n})^2 \geq 0$ dobijamo da je $\frac{|B_n|}{n} \leq \frac{1}{2}(B_n^2 + \frac{1}{n^2})$, a kako redovi na desnoj strani poslednje nejednakosti konvergiraju zbog Parsevalove nejednakosti i konvergencije reda $\sum \frac{1}{n^2}$ sledi da i $\sum \frac{|B_n|}{n^2}$ takođe konvergira.

Slično se pokazuje da i $\sum \frac{|A_n|}{n}$ konvergira.

46. Definicija originala i definicija Laplaceove transformacije.

Funkciju $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ nazivamo **originalom** ako su ispunjena sledeća tri uslova

(a) funkcija je deo po deo neprekidna zajedno sa svim svojim izvodima dovoljno velikog reda, pri čemu na svakom konačnom intervalu može imati najviše konačno mnogo prekida i to prve vrste,

(b) funkcija f zadovoljava **uslov kauzalnosti**, odnosno

$$f(t) = 0 \text{ za svako } t < 0$$

(c) postoje pozitivni brojevi $M > 0$ i $S_0 > 0$ takvi da važi

$$|f(t)| \leq M e^{S_0 t}, \text{ za svako } t \geq 0.$$

Pri tome se realan broj S_0 naziva **apcisa konvergencije** ili **pokazatelj rasta funkcije** f .

Za $p \in \mathbb{C}$ **Laplaceovu** transformaciju $F(p)$, funkcije $f(t)$ koja je original, definišemo nesvojstvenim integralom

$$L(f(t)) \stackrel{\text{def}}{=} F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt.$$

47. Teorema o dovoljnom uslovu za egzistenciju Laplaceove transformacije.

Iskaz i dokaz.

Neka je funkcija f original i neka je $\operatorname{Re}(p) \geq a > S_0 > 0$, gde je S_0 apcisa konvergencije. Tada

$\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt$ postoji, odnosno Laplaceova transformacija $F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt$ je dobro definisana.

Dokaz:

Kako je $|f(t)| \leq M e^{S_0 t}$ i $\operatorname{Re}(p) \geq a > S_0$, dobijamo da je

$$\begin{aligned} |F(p)| &= \left| \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt \right| = \int_0^{+\infty} \left| e^{-\operatorname{Re}(p)t} \right| \left| e^{-\operatorname{Im}(p)t} \right| |f(t)| dt \\ &\leq M \int_0^{+\infty} e^{-\operatorname{Re}(p)t} e^{S_0 t} dt \leq M \int_0^{+\infty} e^{-at + S_0 t} dt \\ &= M \int_0^{+\infty} e^{-(a-S_0)t} dt = \frac{1}{a-S_0}. \end{aligned}$$

48. Teorema o ponašanju Laplaceove transformacije kada argument teži beskonačnosti. Iskaz i dokaz.

Neka je $F(p)$ Laplaceova transformacija originala $f(t)$. Tada važi da je

$$\lim_{p \rightarrow \infty} F(p) = 0.$$

Dokaz: Neka je $p = \operatorname{Re}(p) + i\operatorname{Im}(p)$ takvo da je $\operatorname{Re}(p) \leq a > S_0$. Imamo da je

$$\begin{aligned} |F(p)| &\leq \int_0^{+\infty} e^{-\operatorname{Re}(p)t} |f(t)| dt \leq M \int_0^{+\infty} e^{-(\operatorname{Re}(p)-S_0)t} dt \\ &= M \left(-\frac{1}{\operatorname{Re}(p)-S_0} e^{(\operatorname{Re}(p)-S_0)t} \right) \Big|_0^{+\infty} = \frac{M}{\operatorname{Re}(p)-S_0} \end{aligned}$$

odakle puštajući da $p \rightarrow \infty$ sledi tvrđenje teoreme.

49. Teorema sličnosti, Teorema pomeranja i Teorema kašnjenja. Iskazi i dokazi.

Teorema sličnosti: Ako je $a \in \mathbb{C}$ tada je $L(f(at)) = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right)$.

Dokaz: Polazeći od definicije Laplaceove transformacije imamo da je $L(f(at)) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(at) dt$.

Uvodeći smenu $at = u$, dobijamo da je $L(f(t)) = \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{p}{a}u} f(u) du = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right)$.

Teorema pomeranja: Ako je $p_0 \in \mathbb{C}$ tada je

$$L(e^{p_0 t} f(t)) = F(p - p_0).$$

Dokaz: Polazeći od definicije Laplaceove transformacije imamo da je

$$L(f(e^{p_0 t} f(t))) = \int_0^{+\infty} e^{-(p-p_0)t} f(t) dt = F(p - p_0).$$

Teorema kašnjenja: Ako je $\tau > 0$ tada je

$$L(f(t - \tau)) = e^{-p\tau} F(p)$$

Dokaz: Polazeći od definicije Laplaceove transformacije imamo da je

$L(f(t - \tau)) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t - \tau) dt = F(p - p_0)$. Uvodeći smenu $t - \tau = u$ sledi tvrđenje teoreme.

50. Teoreme o diferenciranju originala i diferenciranju slike. Iskazi i dokazi.

Teorema o diferenciranju originala:

Ako je original $f(t)$ n puta diferencijabilna funkcija tada važi

$$L(f^{(n)}(t)) = p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

Dokaz:

Imamo da je $L(f'(t)) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f'(t) dt$, odakle parcijalnom integracijom dobijamo da je

$$L(f'(t)) = e^{-pt} f(t) \Big|_0^{+\infty} + p \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt = pF(p) - (0)$$

Indukcijom se dokazuje opšta formula za n -ti izvod funkcija.

Teorema o diferenciranju slike:

$$L(t^n f(t)) = (-1)^n F^{(n)}(p)$$

Dokaz: Kako integral koji definiše Laplaceovu transformaciju originala konvergira, diferenciranjem jednakosti (1), n puta po promenljivoj p dokazuje se tvđenje.

51. Teoreme o integraciji originala i integraciji slike. Iskazi i dokazi.

Teorema o integraciji originala:

$$L\left(\int_0^t f(u)du\right) = \frac{1}{p} F(p)$$

Dokaz: Parcijalnom integracijom dokazujemo tvđenje. Imamo da je

$$L\left(\int_0^t f(u)du\right) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} \left(\int_0^t f(u)du\right) dt = \frac{-e^{-pt}}{t} \int_0^t f(u)du \Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{p} \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt = \frac{1}{p} F(p).$$

Teorema o integraciji slike: Ako $\int_p^{+\infty} F(u)du$ konvergira tada je

$$L\left(\frac{f(t)}{t}\right) = \int_0^{+\infty} F(u)du.$$

Dokaz: Kako je $\int_p^{+\infty} F(u)du = \int_p^{+\infty} du \int_0^{+\infty} e^{-ut} f(t)dt$, zamenom redosleda integracija dobijamo da je

$$\int_p^{+\infty} F(u)du = \int_0^{+\infty} f(t)dt \int_p^{+\infty} e^{-ut} du = \int_0^{+\infty} f(t) \frac{(e^{-ut})}{t} \Big|_p^{+\infty} dt = \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt = L\left(\frac{f(t)}{t}\right).$$

52. Teorema o početnoj i krajnjoj vrednosti. Iskaz i dokaz.

Za Laplaceovu transformaciju originala važi

$$\text{a) } \lim_{p \rightarrow \infty} pF(p) = f(0) \quad \text{b) } \lim_{p \rightarrow 0} pF(p) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$$

Dokaz: a) Kako na osnovu teoreme o diferenciranju originala važi da je $L(f'(t)) = pF(p) - f(0)$ i kako zbog teoreme o ponašanju Laplaceove transformacije kada argument $p \rightarrow \infty$ važi da je

$\lim_{p \rightarrow +\infty} L(f'(t)) = 0$ puštajući da $p \rightarrow \infty$ sledi tvđenje.

Kako je $L(f'(t)) = pF(p) - f(0)$ i kako integral koji definiše Laplaceovu transformaciju uniformno konvergira, imamo da je

$$\lim_{p \rightarrow 0} pF(p) - f(0) = \lim_{p \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} e^{-pt} f'(t) dt = \int_0^{+\infty} \left(\lim_{p \rightarrow 0} e^{-pt}\right) f'(t) dt = \int_0^{+\infty} f'(t) dt = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) - f(0).$$

Izjednačavajući početak i kraj sledi tvđenje teoreme.

53. Pojam konvolucije funkcija. Laplaceova transformacija konvolucije.

Neka su $f(t)$ i $g(t)$ originali. Konvoluciju funkcija f i g , u oznaci $f(t) * g(t)$, ili $(f * g)(t)$ definišemo integralom

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$$

Neka su Laplaceove transformacije $L(f(t)) = F(p)$ i $L(g(t)) = G(p)$. Tada je

$$L(f(t) * g(t)) = F(p)G(p).$$

Dokaz: Primenom definicije Laplaceove transformacije imamo da je

$$L(f(t)g(t)) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} dt \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau.$$

Kako za $\tau \in [0, t]$ važi da je $t \in [\tau, +\infty]$, zamenjujući redosled integracije, dobijamo da je

$$L(f(t)g(t)) = \int_0^{+\infty} g(\tau)d\tau \int_{\tau}^{+\infty} e^{-pt} f(t-\tau)dt. \text{ Uvodeći u poslednjem integralu } t-\tau=s \text{ dobijamo da je}$$

$$L(f(t)g(t)) = \int_0^{+\infty} g(\tau)d\tau \int_0^{+\infty} e^{-p(s+\tau)} f(s)ds \text{ odnosno razdvajanjem podintegralnih funkcija dobijamo}$$

$$\text{da je } L(f(t)g(t)) = \int_0^{+\infty} e^{-p\tau} g(\tau)d\tau \int_0^{+\infty} e^{-ps} f(s)ds = G(p)F(p)$$